

针对二维双曲守恒律方程求解方法的研究

吕梦迪[†]

(陕西国际商贸学院, 陕西 咸阳 712046)

摘 要: 对双曲守恒律方程进行数值求解是计算流体力学的重要研究内容。本文从物理概念出发, 通过对计算流体力学和双曲守恒律方程研究现状及发展趋势进行引入, 详细介绍了满足熵稳定条件的二维双曲守恒律方程的熵守恒、熵稳定、熵相容、高分辨率熵稳定格式, 可将其格式应用于具体算例的数值求解中。

关键词: 计算流体力学; 二维双曲守恒律方程; 数值求解方法

中图分类号: O411

文献标识码: A

文章编号: 1003-7551(2021)01-0039-03

1 引言

计算流体力学是基于数值方法对满足定解条件的流体力学方程进行的离散化处理, 借助于电子计算机求得相应方程的数值解, 并对数值解进行进一步的分析和处理, 通过数值模拟的过程得到流体的运动规律, 进而解决流体运动中遇到的实际问题。

双曲守恒律方程的数值解是以计算机为工具对双曲守恒律方程进行数值求解的一种方法。早在二十世纪三十年代, 国外数学家就开始了偏微分方程的理论研究, Courant, Friedrichs和Lewy等人对双曲守恒律方程的解的存在性和惟一性进行了最早的研究, 并给出了著名的稳定性判别条件--CFL条件, 为差分法的进一步发展打下了坚实的基础。Lax在1954年提出了弱解的概念, 且在弱解意义下允许间断解的存在, 但是弱解并不是惟一确定的, 因此很多数值方法无法保证其具有物理意义。满足“粘性消失”的Cauchy问题的解在任何时刻是唯一的具有物理意义的解, 这种解被称为“熵解”, Lax于1973年从热力学第二定律出发, 证明了熵稳定条件可由一个单元熵不等式来表示。满足熵条件的守恒型差分格式被称为熵稳定格式, 不满足熵稳定条件的解被称为非物理解, 其数值模拟结果表现出常见的“膨胀激波”、“奇偶失联”和“红斑”等非物理现象。

2 国内外研究现状及发展趋势

为了达到熵稳定条件, 同时避免非物理现象的产生, 人们常用的做法是通过引入额外的耗散机制来抑制熵的变化。理论研究在格式的相容性、收敛性和稳定性方面取得了卓有成效的发展, Lax由等价性定理建立了稳定性和收敛性之间的关系, 出现了Richtmyer和Lax的Fourier分析法。随着计算机科学技术的发展和应用, 出现了各种数值方法, 如Tadmor^[1]于1987年提出了二阶的熵守恒格式, 并且证明了一个三点格式是熵稳定的, 只需含有比熵守恒格式更多的粘性, 熵稳定这一概念为获得具有物理意义且数值上稳定的解提供了思路。2006年, Roe^[2]在2006年将自己提出的数值粘性项添加在熵守恒格式上, 以此得到了ERoe格式, 该熵稳定格式能够有效地避免解在间断区域的伪振荡现象, 但是该格式是一阶精度的。2009年, Roe和Ismail^[3]在2009年深入研究了解在跨过激波时熵增在数量上是激波强度的立方阶量级, 即熵相容格式, 该格式容易达到熵稳定条件且数值结果更符合真实的物理现象。封建湖、郑素佩、程晓晗、任炯、刘友琼^[4-7]等人构造了高分辨率熵相容格式并成功运用于双曲守恒律方程的求解中。

由于熵稳定格式的解在间断处会出现过度抹平的现象, 利用传统的高精度格式求解方程在间断处会产生伪振荡现象, 因此, 如何构造高精度的数值计算方法, 使之能够精确地捕捉到激波和这些间断, 并且避免伪振荡地产生, 一直以来都是科研工作者致力于研究的焦点。针对以上问题, 以Harten为首的科研者提出了高分辨率TVD(Total Variation Diminishing)格式^[8], 从此打开了高精度格式的构造之路。随之又出现了TVB(Total Variation Bounded)格式, ENO(Essentially Non-oscillatory)格式^[9]、WENO(Weighted ENO)格式^[10]和CWENO(Central WENO)格式^[11]等。郑素佩、吕梦迪^[12-15]等人构造了三阶、四阶、五阶的紧凑CWENO格式, 并成功应用于双曲守恒律方程的求解中。

收稿日期: 2020-12-29

[†] 通讯作者: 571038880@qq.com

3 二维双曲守恒律方程的数值求解方法

双曲守恒律方程是计算流体力学中一类反映物理现象和规律的重要方程。通常情况下，二维守恒律方程具有如下形式：

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \quad (1)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad f(u) = \begin{bmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \vdots \\ f_n(u) \end{bmatrix}, \quad g(u) = \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\text{其中 } (x, y) \in R \times R, \quad t \in R^+, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad f(u)_x = \frac{\partial f(u)}{\partial x}, \quad g(u)_y = \frac{\partial g(u)}{\partial y},$$

$u = u(x, y, t): R \times R \times [0, +\infty) \rightarrow R^n$ 是守恒变量， $f = f(u)$ 是 x 方向上的通量函数， $g = g(u)$ 是 y 方向上的通量函数。且该守恒律方程的 Jacobian 矩阵分别为：

$$M(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \quad N(u) = \frac{\partial g(u)}{\partial u}. \quad (3)$$

即方程(1)也可以写成：

$$u_t + M(u)u_x + N(u)u_y = 0. \quad (4)$$

此方程(1)被称为二维双曲型守恒律方程。

3.1 熵守恒格式

给定一组熵对 (P, Q, R) ，对于 $\forall u \in R^n$ ，均有：

$$Q'(u)^T = P'(u)^T f'(u), \quad R'(u)^T = P'(u)^T g'(u), \quad (5)$$

成立。则 $V = P'(u)$ 被定义为对应的熵变量， $\psi_x = V^T f - Q$ ， $\psi_y = V^T g - R$ 分别被定义为 x 方向和 y 方向的熵势。对于方程(1)，若取 $f(u) = \frac{u^2}{2}$ ， $g(u) = \frac{u^2}{2}$ ，则相应的熵变量则为 $v^x(u) = v^y(u) = u$ 。由此可知，当方程(1)中的通量函数 $f(u)$ 和 $g(u)$ 不同时，其对应的熵通量和熵势也可能不同，其数值熵通量函数为：

$$F_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{i+1,j})f_{i+1/2,j}^C - \frac{1}{2}(\psi(v_{i,j}) + \psi(v_{i+1,j})) \quad (6)$$

$$F_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{i,j+1})f_{i,j+1/2}^C - \frac{1}{2}(\psi(v_{i,j}) + \psi(v_{i,j+1})) \quad (7)$$

该格式被称为具有二阶精度的熵守恒格式。

3.2 熵稳定格式

熵守恒格式能够保持总熵不变。但在激波等间断处会产生振荡，根据比较原则，若在熵守恒格式上添加合适的耗散项，使得总熵有所耗散，由此避免伪振荡地产生，则该格式被称为熵稳定格式。Roe 用熵守恒格式代替 Roe 通量函数中的算术平均数，从而得到新的数值通量函数为：

$$F_{i+1/2,j}^{ES} = f_{i+1/2,j}^C - \frac{1}{2}T_{i+1/2,j}^{Roe} \frac{du}{dv}[v]. \quad (8)$$

$$F_{i,j+1/2}^{ES} = f_{i,j+1/2}^C - \frac{1}{2}T_{i,j+1/2}^{Roe} \frac{du}{dv}[v]. \quad (9)$$

其中以 x 方向为例，可知：

$$T_{i+1/2}^{Roe} = |\bar{a}| = |a_{i+1/2}|, \quad (10)$$

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i}, & u_{i+1} \neq u_i, \\ f'(u_i), & u_{i+1} = u_i. \end{cases} \quad (11)$$

该格式被称为熵稳定格式。

3.3 熵相容格式

Ismail 发现熵稳定格式中的粘性项的解在跨过激波时达不到应有的熵增, 若要达到应有熵增, 就需要在熵稳定格式的基础上添加额外的耗散项来满足熵的色散, 其数值通量函数为:

$$F_{i+1/2,j}^{EC} = F_{i+1/2,j}^C - \frac{1}{2} R(\Lambda + \alpha |\Delta\Lambda|) R^T (V_{i+1,j} - V_{i,j}) \quad (12)$$

$$F_{i,j+1/2}^{EC} = F_{i,j+1/2}^C - \frac{1}{2} R(\Lambda + \alpha |\Delta\Lambda|) R^T (V_{i,j+1} - V_{i,j}) \quad (13)$$

一般情况下, 取 $\alpha \in [1/6, 1/3]$, $|\Delta\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_{i+1}^1 - \lambda_i^1|, \dots, |\lambda_{i+1}^m - \lambda_i^m|)$ 。此格式即为熵相容格式。

3.4 高分辨率熵稳定格式

分别给(12)、(13)式添加适当的限制器, 得到高分辨率双曲守恒律方程的熵稳定格式的数值通量为:

$$F_{i+1/2,j}^{HR} = f_{i+1/2,j}^C - \frac{1}{2} (|\bar{a}| + \alpha |[a]|) |1 - \phi_{i+1/2,j}| \frac{du}{dv}[v], \quad (14)$$

$$F_{i,j+1/2}^{HR} = f_{i,j+1/2}^C - \frac{1}{2} (|\bar{a}| + \alpha |[a]|) |1 - \phi_{i,j+1/2}| \frac{du}{dv}[v], \quad (15)$$

其中 $\phi_{i+1/2,j}, \phi_{i,j+1/2}$ 为限制器, 常用的限制器有 Van Leer 限制器、Superbee 限制器、Combined Superbee 限制器、Minmod 限制器、Combined Minmod 限制器等。

4 结语

本文针对二维双曲守恒律方程的求解问题, 主要介绍了熵守恒、熵稳定、熵相容格式, 并分析了提高格式精度的高分辨率熵稳定格式, 这些方法易于计算机编程实现以及向高维双曲守恒律方程的推广, 即对双曲守恒律方程的求解问题有重要的研究意义。但对于二维双曲守恒律方程, 有一些问题需要我们继续研究。比如如何更好地控制二维问题中常出现的“红斑”现象; 如何基于非结构网格构造高分辨率的熵稳定格式; 如何提高格式的分辨率以及二维甚至多维熵稳定格式高分辨率理论研究等。

参 考 文 献

- [1] Tadmor. E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws I [J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179):91-103.
- [2] Roe. P. L. Entropy conservation schemes for Euler equations [R]. Talk at HYP 2006, Lyon, France. 2006.
- [3] Ismail, F, Roe. P. L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks[J]. J. Comput. Phys, 2009,228(15):5410-5436.
- [4] 郑素佩, 封建湖. 高分辨率熵相容算法在二维溃坝问题中的应用[J].水动力学研究与进展,2013,5:545-551.
- [5] 程晓晗, 封建湖. 求解双曲守恒律方程的 WENO 型熵相容格式[J].爆炸与冲击,2014,4:501-507.
- [6] 任炯, 封建湖, 刘友琼, 梁楠.求解双曲守恒律方程的高分辨率熵相容格式构造[J].计算物理,2014,31(5):0539-0551.
- [7] 刘友琼, 封建湖. 求解浅水波方程的熵相容格式[J].应用数学和力学,2013,34(12):1247-1257.
- [8] Harten A. High resolution schemes for conservation laws [J].J.Comput.Phys,1983,49(3):357-393.
- [9] Harten A, Engquist B, Osher S and Chakravathy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes [J]. Comput. Phys, 1987, 71:231-303.
- [10] Liu X. D, Osher S. and Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J].Comput. Phys, 1994, 115: 200-212.
- [11] Levy D, Puppo G, Russo G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws [J]. Math. Model. Numer. Anal, 1999, 33:547-571.
- [12] 郑素佩, 封建湖, 刘彩侠. 二维双曲守恒律标量方程的三阶 CWENO-型熵相容算法 [J], 计算机应用, 2012, 32(10): 2745-2747,2751.
- [13] 郑素佩, 封建湖.四阶高分辨率熵相容算法[J],计算机应用,2013, 33(9):2416-2418,2427
- [14] 吕梦迪, 郑素佩, 陈芳. 五阶高分辨率熵稳定算法[J], 信阳师范学院学报(自然科学版), 2018,31(2):191-196.
- [15] 吕梦迪. 求解双曲守恒律方程的五阶 CWENO 型熵稳定格式研究[D]. 西安: 长安大学硕士学位论文, 2018.