

高职院校高数中凑微分法的教学研究

张永安 陕西国际商贸学院 陕西西安 712046

【文章摘要】

在高等数学的教学过程中,凑微分是既是一个重点,又是一个难点。本文介绍了两种隐函数求导方法:(1)换元积分法中的“凑微分”; (2)分部积分法中的“凑微分”。

【关键词】

凑微分;基本积分表;复合函数

中图分类号:0172 文献标识码:A

由于高职院校学生的数学基础比较差,学习不定积分时很不适应,尤其是不定积分中凑微分的思想不到位,导致学习困难。但凑微分法在高数中有着十分重要的地位,它是学习不定积分、微分方程、多元函数重积分的基础。因此我在高职院校高数的教学中采用如下的教学方式以解决学生学习凑微分法困难的矛盾。

1 换元积分法中的“凑微分”

计算不定积分的主要依据就是“基本积分表”。遇到不定积分的计算,根据被积函数的结构,找到与其相对应的基本积分公式。

基本积分公式中 $\int f(u) du = F(u) + C$

其特征是被积函数的变量是 u ,而积分变量也是 u 。

1)被积函数是单独的复合函数,只需将积分变量凑成被积复合函数的内函数部分

例 1:计算 $\int \cos(2x-1) dx$

分析: $\cos(2x-1)$ 其中外函数余弦函数基本公式中有,只需将 dx 中的 x 凑成 $2x-1$ 即可。

解:原式 $= \frac{1}{2} \int \cos(2x-1) d(2x-1) = \frac{1}{2} \sin(2x-1) + C$

2)被积函数在基本公式中没有,但在形式上有接近的,就以此公式为目标去靠近从而求解。

例 2:计算 $\int \frac{1}{4-x^2} dx$

分析:此不定积分与 $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arctan x + C$ 形式接近,因此我们以此为目标去靠近。

解:原式 $= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1-(\frac{x}{2})^2} d(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} d(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

3)被积函数为复合函数的乘积(商),留下一个,另一个与 dx 结合“凑微分”,并且使凑成的新函数为留下的复合函数的内函数。

例 3:计算 $\int 2xe^{x^2} dx$

分析:被积函数为 $2x$ 与 e^{x^2} 的乘积,留下 e^{x^2} ,而 $2x$ 与 dx 结合凑微分。

解:原式 $= \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C$

2 分部积分法中的“凑微分”

分部积分公式: $\int u dv = uv - \int v du$

分部积分法主要用于被积函数是两个函数乘积的形式,凑微分后新函数不是留下函数的内函数的不定积分。

例 4:计算 $\int x \sin x dx$

分析:无论留下 x 还是 $\sin x$,都不能满足凑微分的条件,这时转入分部积分。

解:原式 $= - \int x d \cos x = -x \cos x$

$+ \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

例 5:

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} \quad (u=\sin x) \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right|^2 = \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| \\ &= \ln |\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

用类似的方法可得

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x|$$

以上仅是常见的凑微分的基本类型,而且仅是一次凑微分就可以求解的。它是最基本的凑微分类型。我们首先必须熟悉这些,进而融会贯通,学习诸如多次凑微分等复杂的方法。

【参考文献】

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(上,下) [M]. 北京:高等教育出版社, 2007.
- [2] 李忠,周建莹. 高等数学(上,下) [M]. 北京:北京大学出版社, 2009.
- [3] 盛向耀. 高等数学(上,下) [M]. 北京:高等教育出版社, 2007.

【作者简介】

张永安(1962—),男,陕西咸阳人,陕西国际商贸学院教师,主要从事高等数学、数学建模等课程的教学与研究。